TITLE:
CR invariant of weight 6

AUTHOR(S):
平地, 健吾

CITATION:
平地, 健吾. CR invariant of weight 6. 数理解析研究所講究録 1998, 1037: 22-28

ISSUE DATE:
1998-04

URL:
http://hdl.handle.net/2433/61956

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1037 巻 1998 年 22-28

CR invariant of weight 6

平地健吾 (Kengo Hirachi)
大阪大学大学院理学研究科

1 Introduction

Fefferman [F2] は強擬凸領域のベルグマン核の漸近挙動を記述するために境界の局所双正則不変量 (CR 不変量) の概念を導入した. CR 不変量の研究は以後 [G1], [G2], [BEG], [HKN], [H] によって進められている. とくに [BEG] はウエイト n 以下の CR 不変量を決定し, それらを用いてベルグマン核を対数項を除いて完全に記述した. この結果は最近 [H] により対数項の記述にまで一般化された. これらのベルグマン核に関連した結果は [HK] において詳しく解説している.

このノートでは $n=2$, したがって領域の境界が実 3 次元の曲面の場合, に話を制限し CR 不変量の具体例 ([G1], [HKN]) と関連する不変式論の一般論の結果 ([H]) を説明する. まず Section 1 ではウエイト 6 以下の CR 不変量を定義に基づいて計算した結果を紹介する. とくにここで与えるウエイト 6 の CR 不変量の基底は新しい結果である. Section 2 ではそれらの CR 不変量が [BEG] による不変式論を用いて決定されることを説明する.

2 CR invariants

M を $\mathbf{C}^2$ 内の実解析的な強擬凸超曲面とする. これは M の各点 p に対して p のまわりの正則局所座標 (z_1, z_2), $z_2 = u + iv$, が存在して M が $p = (0,0)$ の近くで

$$(1)\qquad \rho(z_1, z_2) = 2u - |z_1|^2 - \sum_{p,q\geq 2, l\geq 0} A^l_{p\overline{q}} z_1^p \overline{z}_1^q v^l = 0,$$

の形に表わされることと同値である. このような定義関数で与えられる曲面 (の芽)を $N(A)$ と書く. CR 不変量はこのテーラー係数 $A^l_{p\overline{q}}$ の不変多項式として定義される.

定義. ウエイト $w \in \mathbf{N}$ の CR 不変量とは $A = (A^l_{p\overline{q}})$ を変数とする多項式 $P(A)$ で次の変換則を満たすものである: 原点を保つ局所双正則写像 Φ が $M = N(A)$ を (1) の形の曲面 $N(\widetilde{A}) = \Phi(N(A))$ に移すときには

$$(2)\qquad P(\widetilde{A}) = |\det \Phi'(0)|^{-2w/3} P(A)$$

が成り立つ. ここで Φ' は Φ の正則 Jacobi 行列である.

条件 (3) はすべての局所正則同値な曲面の対に対して成立していなければならない．よって，与えられた多項式が $P(A)$ が CR 不変量であることを示すにはまず曲面の正則同値類を調べる必要がある．強擬凸超曲面の局所正則同値類はこれまでに E. Cartan, 田中, Chern-Moser 等によって決定されている．ここでは Moser [CM] による方法を利用する．

Moser は曲面 M の任意の点に対して (2) の表示のテーラー係数 A が

$$A^l_{2\bar{2}} = A^l_{2\bar{3}} = A^l_{3\bar{2}} = A^l_{3\bar{3}} = 0, \quad l \geq 0, \tag{3}$$

を満たすような座標 (z_1, z_2) が存在することを示し，さらにそのような座標はジーゲル領域のイソトロピー群 H の作用を除いて一意的であることを証明した．この座標を (M, p) の (Moser の) 標準座標，$N(A)$ を (M, p) の標準形とよぶ．標準座標は一意的には決定されないので標準形も (M, p) から一意的に決定されるとは限らない．すなわち，標準形の係数 A 全体の集合を

$$\mathcal{N} = \{A = (A^l_{p\bar{q}})_{p,q\geq 2, l\geq 0} : A \text{ は条件 (3) を満たす}\}$$

とするとき $N(A)$, $A \in \mathcal{N}$, の中には正則同値であるものが存在する．Moser はこの正則同値類を H の $\mathcal{N}$ への作用の軌道として記述した．この作用を説明するために H の構造を復習する．

群 H はジーゲル領域 $2u > |z_1|^2$ の正則同型 Φ で原点を固定するもの全体のなす群である(Φ は原点の近傍まで解析接続されると仮定する)．H の元は次のような二つの変換の合成として一意的に表わされる:

$$\phi_\lambda(z_1, z_2) = (\lambda z_1, |\lambda|^2 z_2) \quad \text{for } \lambda \in \mathbf{C}^*, \tag{4}$$

$$\psi_{(\xi,r)}(z_1, z_2) = \frac{(z_1 - \bar{\xi}\, z_2, z_2)}{1 + \xi\, z_1 - \eta\, z_2} \quad \text{for } (\xi, r) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}, \tag{5}$$

ここで $\eta = -|\xi|^2/2 + i\,r$ である．$\{\phi_\lambda : \lambda \in \mathbf{C}^*\}$ および $H_0 = \{\psi_{(\xi,r)} : (\xi, r) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}\}$ は H の部分群であり，前者は乗法群 $\mathbf{C}^*$, 後者はハイゼンベルグ群と同型である．各 $\lambda \in \mathbf{C}^*$ に対して ϕ_λ は標準座標の間の変換を与える．すなわち，$N(A)$ が標準形であれば $N(\widetilde{A}) = \phi_\lambda(N(A))$ も標準形であり

$$\widetilde{A}^l_{p\bar{q}} = \lambda^{1-p-l}\bar{\lambda}^{1-q-l} A^l_{p\bar{q}}$$

が成り立つ．これが $\mathbf{C}^* \subset H$ の $\mathcal{N}$ への作用を与えている．一方，変換 $\psi_{(\xi,r)}$ は標準形を標準形に移すとは限らない．H_0 の $\mathcal{N}$ への作用は $\widetilde{M} = \psi_{(\xi,r)}(N(A))$ を標準形に移す座標変換を一意的に構成することにより与えられる．この作用を実際に計算するのは困難であり，これが CR 不変量を決定する過程での最大の難点である．

変換則 (2) を $\Phi = \phi_\lambda$ について考えれば

$$P(\widetilde{A}) = |\lambda|^{-2w} P(A) \quad \text{for every } \lambda \in \mathbf{C}^* \tag{6}$$

をえる．したがって (6) を満たす多項式 $P(A)$ に対しては $P(A)$ が CR 不変量であることと $P(A)$ が H_0 の作用に関して不変であることが同値となる．この H_0 作用を具体的に計算することによりウエイト w の CR 不変量のなす複素ベクトル空間 I^{CR}_w を決定することができる．現在知られている結果を表にまとめると:

weight	$\dim I_w^{\mathrm{CR}}$	base
0	1	1
1 or 2	0	0
3	1	$A^0_{4\bar{4}}$
4	1	$\lvert A^0_{2\bar{4}}\rvert^2$
5	2	$P_1(A), P_2(A)$
6	3	$\lvert A^0_{4\bar{4}}\rvert^2, P_3(A), P_4(A)$

ウエイト 6 の CR 不変量の $|A^0_{4\bar{4}}|^2$ はウエイト 3 の CR 不変量の $A^0_{4\bar{4}}$ の自乗であることに注意しよう．ここで P_1, P_2, P_3, P_4 は次で与えられる

$$
\begin{aligned}
P_1(A) =& |A^0_{5\bar{2}}|^2 + 18\,|A^0_{4\bar{3}}|^2 + \mathrm{Re}\Big(18\,A^0_{3\bar{5}}A^0_{4\bar{2}} - 5i\;A^1_{2\bar{4}}A^0_{4\bar{2}}\Big)\,,\\
P_2(A) =& |A^0_{5\bar{2}}|^2 + \frac{171}{20}\,|A^0_{4\bar{3}}|^2 + \mathrm{Re}\Big(\frac{15}{2}\,A^0_{3\bar{5}}A^0_{4\bar{2}} - \frac{37}{20}\,i\,A^1_{2\bar{4}}A^0_{4\bar{2}}\Big),\\
P_3(A) =& |A^0_{2\bar{6}}|^2 - 10\,|A^0_{3\bar{5}}|^2 + \frac{3}{2}\,|A^1_{2\bar{4}}|^2 + \frac{61}{5}\,|A^0_{4\bar{4}}|^2\\
&+ \mathrm{Re}\Big(48\,A^0_{4\bar{3}}\,A^0_{4\bar{5}} + 26\,A^0_{4\bar{2}}\,A^0_{4\bar{6}} - 28\,A^0_{3\bar{6}}\,A^0_{5\bar{2}} + \frac{5}{2}\,A^2_{2\bar{4}}\,A^0_{4\bar{2}}\Big)\\
&+ \mathrm{Im}\Big(2\,A^1_{2\bar{4}}\,A^0_{5\bar{3}} - 10\,A^1_{2\bar{5}}\,A^0_{5\bar{2}} + 12\,A^1_{3\bar{4}}\,A^0_{4\bar{3}} + 9\,A^1_{3\bar{5}}\,A^0_{4\bar{2}}\Big),\\
P_4(A) =& |A^0_{2\bar{6}}|^2 - 3\,|A^0_{3\bar{5}}|^2 + \frac{11}{12}\,|A^1_{2\bar{4}}|^2 + 8\,|A^0_{4\bar{4}}|^2\\
&+ \mathrm{Re}\Big(20\,A^0_{4\bar{3}}\,A^0_{4\bar{5}} + 12\,A^0_{4\bar{2}}\,A^0_{4\bar{6}} - 14\,A^0_{3\bar{6}}\,A^0_{5\bar{2}} - \frac{4}{3}\,A^2_{2\bar{4}}\,A^0_{4\bar{2}}\Big)\\
&+ \mathrm{Im}\Big(2\,A^1_{2\bar{4}}\,A^0_{5\bar{3}} - \frac{16}{3}\,A^1_{2\bar{5}}\,A^0_{5\bar{2}} + 5\,A^1_{3\bar{4}}\,A^0_{4\bar{3}} + \frac{13}{3}\,A^1_{3\bar{5}}\,A^0_{4\bar{2}}\Big).
\end{aligned}
$$

もちろん基底の選び方には任意性がある．ここで与えた例は後で説明するワイル不変量を用いた表示に自然に現われるものである．ウエイト 5 までの CR 不変量の決定は [G1], [HKN] による．たとえばウエイト 5 の CR 不変量を決定するにはまず (6) を満たす A の単項式のリスト

$$
\begin{gathered}
A^0_{3\bar{5}}A^0_{4\bar{2}},\ A^1_{2\bar{4}}A^0_{4\bar{2}},\ A^0_{5\bar{3}}A^0_{2\bar{4}},\ A^1_{4\bar{2}}A^0_{2\bar{4}},\\
|A^0_{2\bar{5}}|^2,\ |A^0_{3\bar{4}}|^2,\ A^0_{6\bar{6}},\ A^1_{5\bar{5}},\ A^2_{4\bar{4}},
\end{gathered}
$$

を作り，その一次結合で H_0 不変になるものを探す．H_0 不変性の条件は一次結合の係数に関する連立一次方程式として与えられ，その解空間の基底の一組が $P_1(A), P_2(A)$ (の係数) になっている．

ウエイト 6 の CR 不変量の決定も同じ方針で行った．P_3, P_4 の表示から想像できるようにこの計算は短くはない．実際には Moser の標準座標を計算するプログラムを *Mathematica* 上で書き，H_0 不変性の条件を生成させた．(十分な速さとメモリーをもったコンピューターがあれば) このプログラムでより高次のウエイトの CR 不変量の決定することも可能である(が 1993 年に私の利用できた機械ではウエイト 6 がメモリーの限界であった．その後，これから説明する，不変式論の応用が可能になってきたのでこの効率の悪いプログラムは更新していない)．

3 Weyl invariants

[HKN], [H] では前章で紹介した CR 不変量の基底を生成するより効率的な方法を与えた．この方法は Fefferman [F2] による ambient 計量を用いた CR 不変量の構成方法の精密化である．まずこの構成方法を復習する．

曲面 $M = N(A)$ の定義関数 r にたいして次の複素 Monge-Ampère 方程式を考える:

$$J[r] := \begin{pmatrix} r & r_1 & r_2 \\ r_{\overline{1}} & r_{1\overline{1}} & r_{2\overline{1}} \\ r_{\overline{2}} & r_{1\overline{2}} & r_{2\overline{2}} \end{pmatrix} = 1, \text{ where } r_{j\overline{k}} = \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}.$$

この方程式は一般に滑らかな解をもたないが，$J[r] = 1 + O^3(M)$ を満たす定義関数 r が modulo $O^4(M)$ で一意的に存在することが Fefferman [F1] によって示されている．この定義関数を Fefferman の定義関数とよび r^{F} と書く．Fefferman [F2] は r^{F} を用いて CR 不変量を生成するアルゴリズムを与えた．このアルゴリズムを説明しよう．

まず新しい変数 $z_0 \in \mathbf{C}^*$ を導入し $\mathbf{C}^* \times M$ の $\mathbf{C}^3$ での近傍で定義された Lorentz-Kähler 計量 $g = g[r^{\mathrm{F}}]$ を

$$g_{j\overline{k}} = \frac{\partial^2(|z_0|^2 r^{\mathrm{F}})}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}$$

で定義する(この g はambient 計量と呼ばれる)．g の曲率テンソルを R, その共変微分を $R^{(p,q)} = \overline{\nabla}^{q-2}\nabla^{p-2}R$ とする．ここで ∇ (resp. $\overline{\nabla}$) はタイプ $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) の共変微分である．これらのテンソルの積を作り，得られたテンソルの完全縮約

$$W = \mathrm{contr}(R^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes R^{(p_s,q_s)})$$

を考える．W のウエイト w を $2w = \sum_{j=1}^{s}(p_j + q_j) - 2s$ と定義する．各 w に対してウエイト w の完全縮約の一次結合をウエイト w のワイル不変量とよぶ．

ワイル不変量の定義は定義関数 r^{F} の選び方に依存している．[HKN] ではこの依存性の正確な評価を与えた．その結果を用いるとウエイト 5 以下のワイル不変量 W に対して $W(1,0,0)$ は A の多項式であることが示される．この多項式を $P_W(A)$ と書く．$P_W(A)$ がCR 不変量になることが Monge-Ampère 方程式の双正則不変性から導かれる．これらの多項式を計算するとウエイト 5 以下の CR 不変量が全て現われることがわかる (このリストでは，記号を簡単にするために，ワイル不変量 W と CR 不変量 $P_W(A)$ を同一視する):

$$\begin{aligned} \mathrm{contr}(R^{(4,4)}) &= 576\, A^0_{4\overline{4}}, \\ \|R^{(4,2)}\|^2 &= 1792\, |A^0_{2\overline{4}}|^2, \\ \|R^{(5,2)}\|^2 &= -57600\, P_1(A), \\ \|R^{(4,3)}\|^2 &= -76800\, P_2(A), \end{aligned}$$

ここで $\|R^{(p,q)}\|^2 = \mathrm{contr}(R^{(p,q)} \otimes R^{(q,p)})$.

ウエイト 6 以上のワイル不変量 W に対しては $P_W = W(1,0,0)$ が A の多項式で与えられるとは限らない．高次のウエイトをもつワイル不変量から CR 不変量を構成するには定義関数 r^{F} の任意性をより詳しく調べる必要がある．[H] では Monge-Ampère 方程式の漸近解を用いて定義関数を構成し，その任意性を解析した．

方程式 $J[r]=1$ を $\mathbf{C}^*$ 束上に持ち上げ $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^2$ 上の方程式

$$J_{\#}[u] := \begin{pmatrix} u_{0\bar{0}} & u_{1\bar{0}} & u_{2\bar{0}} \\ u_{1\bar{1}} & u_{1\bar{1}} & u_{2\bar{1}} \\ u_{2\bar{2}} & u_{1\bar{2}} & u_{2\bar{2}} \end{pmatrix} = |z_0|^2$$

を考える．この方程式は $\mathbf{C}^* \times M$ に沿った漸近解

$$u = r_{\#} + r_{\#} \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \cdot \left(r^3 \log r_{\#} \right)^j$$

をもつ．ここで r は M の定義関数，$r_{\#} = |z_0|^2 r$，そして η_j は M の近傍での滑らかな関数である．このような r は常に Fefferman の近似解になっている．さらにこのような漸近解は r に対する初期条件

$$\left. \frac{\partial^4 r}{\partial \rho^4} \right|_{\rho=0} = f(z_1, \bar{z}_1, v)$$

によって一意的に決定される．ここで ρ 偏微分は原点の近傍での実座標 $(z_1, \bar{z}_1, \rho, v)$ に関して考える．$f(z_1, \bar{z}_1, v)$ のテーラー展開を

$$f(z_1, \bar{z}_1, v) = \sum_{p,q,l \geq 0} C^l_{p\bar{q}} z_1^p \bar{z}_1^q v^l$$

とするとき r に関して定義されるワイル不変量 W の $(1,0,0)$ での値 P_W は $A = (A^l_{p\bar{q}})$ と $C = (C^l_{p\bar{q}})$ の多項式 $P_W(A, C)$ で与えられる．とくにウエイト 5 以下の場合はこの多項式は A だけに依存しCR 不変量を与える．ウエイト 6 以上のワイル不変量の中にも P_W が C に依存しないものが存在する．たとえば

$$\|R^{(6,2)}\|^2 - \frac{5}{2}\|R^{(4,4)}\|^2 + 1080 \, \mathrm{contr}(R^{(2,2)} \otimes R^{(6,6)}) = 1382400 \, P_3(A)$$
$$\|R^{(6,2)}\|^2 - 2\|R^{(5,3)}\|^2 + 720 \, \mathrm{contr}(R^{(2,2)} \otimes R^{(6,6)}) = 2073600 \, P_4(A),$$

が成り立つ．これらと $\mathrm{contr}(R^{(4,4)})^2 = 576^2 (A^0_{4\bar{4}})^2$ をあわせれば，P_W が C に依存しないワイル不変量が全てのウエイト 6 の CR 不変量を与えることがわかる．そこでP_W が C に依存しないワイル不変量を $\mathcal{C}$-independent ワイル不変量とよぶことにする．[H] ではこのウエイト 6 での結果の一般化として次の定理を示した．

定理. 任意の $\mathcal{C}$-independent ワイル不変量 W に対して $P_W(A)$ は CR 不変量である．逆に任意の CR 不変量 $P(A)$ に対して $\mathcal{C}$-independent ワイル不変量 W が存在して $P(A) = P_W(A)$ が成り立つ．

ここでは 2 次元の場合にしかワイル不変量を定義しなかったが，この定理は一般の次元で成立する．

この定理により CR 不変量の決定がワイル不変量のパラメータ C への依存性の解析の問題に帰着される．とくにウエイト 5 以下の場合は全てのワイル不変量が C-independent であり CR 不変量とワイル不変量を同一視することができる．より高次のウエイトでの C 依存性の解析が今後の課題である．

定理の証明は次の二つの段階に分かれる:

1. 全ての CR 不変量 $P(A)$ は $R^{(p,q)}$, $p,q \geq 2$, の成分の H-不変多項式 $P(R)$ として表わされることを示す．ここで曲率 $R^{(p,q)}$ への H の作用は $H \subset SU(1,n)$ とみなしたときの通常のテンソル作用である．

2. 全ての H-不変多項式 $P(R)$ はワイル不変量であることを示す．これは H が半単純でないため容易ではない．この段階で [BEG] による不変式論を用いる．

A への H の作用は複雑であったが $R^{(p,q)}$ に変換されたときには H の線形作用になっていることが本質的である．このとき $\mathcal{N}$ が線形空間であったのに対して曲率 $R^{(p,q)}$, $p,q \geq 2$, のなす空間は無限次元の多様体になる．段階 2 ではこの多様体の具体的な記述が必要となる．

References

[BEG] T.N. Bailey, M.G. Eastwood and C.R. Graham, *Invariant theory for conformal and CR geometry*, Ann. of Math. **139** (1994), 491–552.

[CM] S.S. Chern and J. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[F1] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **103** (1976), 395–416, Correction, ibid. **104** (1976), 393–394.

[F2] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[G1] C.R. Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, Complex analysis II, Lecture Notes in Math., vol. 1276, Springer, 1987.

[G2] C.R. Graham, *Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation*, Compositio Math. **64** (1987), 133–155.

[H] K. Hirachi, *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel*, preprint.

[HK] K. Hirachi and G. Komatsu, *Invariant theory of the Bergman kernel*, to appear in "CR-Geometry and Overdetermined Systems", Advanced Studies in Pure Mathematics, 1997.

[HKN] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *CR invariants of weight five in the Bergman kernel*, preprint.

Department of Mathematics, Osaka University,
Toyonaka, Osaka 560, JAPAN
E-mail address: hirachi@math.sci.osaka-u.ac.jp